DM n$^{\text{o}}$3 (non noté)

Pour la rentrée des vacances de pâques 2025

Exercice 1 - Étude d'un endomorphisme

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer le rang de f, puis montrer que la famille $(e_2 + e_3 + e_4\ ,\ e_1 + e_5)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$
   (b) En déduire la dimension r de $\mathrm{Ker}(f)$, puis donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ qu'on notera $\mathcal{B}' = (f_j)_{1\leq j\leq r}$
2. On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.

   (a) Écrire $f(u)$ et $f(v)$ comme combinaisons linéaires de e_1, e_2, e_3, e_4, e_5
   (b) Écrire $f(u - v)$ et $f(u + 3v)$ comme combinaisons linéaires de u et v.
   (c) Montrer que la base $\mathcal{B}'' = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ constitué des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ et des vecteurs $f_4 = u - v$ et $f_5 = u + 3v$ constitue une base de $\mathbb{R}^5$, et que la matrice de f dans cette base est

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (d) En déduire qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $C = PDP^{-1}$. On ne demandera pas de déterminer P et P^{-1}.
   (e) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de C^n en fonction de P et P^{-1}.

Exercice 2 - Relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que

$$\mathbb{P}(X = 0) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right)\mathbb{P}(X = k - 1)$$

Dans ce problème, on étudie une variable aléatoire X qui vérifie une relation de Panjer pour différentes valeurs de a et de b.

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.
   (a) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{b^k}{k!}\mathbb{P}(X = 0)$$

   (b) Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$. En déduire $\mathbb{P}(X = 0)$.

(c) Reconnaître la loi de X et donner $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.

   (a) Montrer que $\forall k \geq 2$, $\mathbb{P}(X = k) = 0$

   (b) En déduire que X suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a

   (c) Donner l'espérance et la variance de X en fonction de a.

3. On suppose dans cette question que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$.

   (a) Montrer que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(Z = k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}(Z = k-1)$$

   (b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes en fonction de n et p.

4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que X est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.

   (a) Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$. En déduire que $a + b \geqslant 0$

   (b) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 0$:

$$\sum_{k=1}^{m+1} k\mathbb{P}(X = k) = a\sum_{k=0}^{m}(k+1)\mathbb{P}(X = k) + b\sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(X = k)$$

   (c) En déduire que $\left((1-a)\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(X = k)\right)_{m\geqslant 1}$ est majorée, puis que X admet une espérance.

   Préciser alors la valeur de $\mathbb{E}[X]$ en fonction de a et b.

   (d) Montrer que X admet un moment d'ordre 2 et que

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$$

   Indication : montrer que $\sum_{k=1}^{m+1} k^2\mathbb{P}(X = k) = a\sum_{k=0}^{m}(k+1)^2\mathbb{P}(X = k) + b\sum_{k=0}^{m} k\mathbb{P}(X = k)$ *et s'inspirer de la question 4.c.*

   (e) En déduire que X admet une variance et préciser la valeur de $V(X)$ en fonction de a et b